MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
*Liberté
Égalité
Fraternité*

Conseil scientifique
de l'éducation nationale

Note du CSEN —
— Février 2022, n° 5

Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : Le test de la ligne numérique

Rédigée par Stanislas Dehaene, Cassandra Potier-Watkins, Chen Xi He et Marie Lubineau[1]

Résumé

L'apprentissage des nombres décimaux et des fractions pose de grandes difficultés. Il arrive trop souvent que les élèves mémorisent une procédure de calcul sans vraiment comprendre le sens des objets mathématiques qu'ils manipulent. Comment savoir s'ils ont vraiment compris les concepts sous-jacents ? Nous proposons un test simple et ludique : le placement d'un nombre sur une ligne numérique graduée.

À chaque essai, l'élève reçoit un nombre et doit le placer avec sa souris sur une ligne graduée, soit entre 0 et 20, soit entre 0 et 5. D'un essai à l'autre, le nombre peut être un entier (par exemple 4), le résultat d'une addition ou d'une soustraction (par exemple 7-4), un nombre décimal (par exemple 2,4) ou une fraction (par exemple $\frac{1}{2}$). Selon qu'il parvienne ou non à placer le nombre à sa position exacte, l'élève reçoit un feedback positif ou négatif.

Ce test a été proposé à un vaste échantillon représentatif d'élèves en début de sixième. Les résultats montrent qu'il est très sensible aux connaissances et aux faiblesses des élèves. Ceux-ci placent correctement les nombres entiers et résolvent plutôt bien les opérations élémentaires, mais le calcul avec des nombres décimaux et surtout la compréhension des fractions leur posent de grandes difficultés. Ainsi, 78 % des élèves en début de sixième n'ont pas su placer correctement la fraction $\frac{1}{2}$ au milieu de l'intervalle [0,1] !

L'analyse des erreurs montre que les élèves confondent souvent une fraction, soit avec l'une de ses composantes entières (½ → 1 ou 2), soit avec le nombre décimal (1,2). Cependant, le feedback leur permet de s'améliorer au cours du test. La littérature montre que la bonne compréhension de la ligne numérique est fortement prédictive de la réussite ultérieure en mathématiques, et qu'un entrainement dans ce domaine, accompagné d'une pédagogie adaptée, a des effets positifs. Nous proposons donc que les élèves du premier et du second degré pratiquent le placement des nombres sur la ligne numérique afin de les aider à comprendre les quantités en jeu et aussi d'aider les enseignants à repérer les difficultés qu'ils rencontrent. Nous proposons également d'autres pistes, appuyées sur la recherche, pour faire travailler le sens de ces nombres.

1 Cassandra Potier-Watkins, Chen Xi He, Marie Lubineau, membres de l'unité de neuroimagerie cognitive à NeuroSpin ; Stanislas Dehaene, président du CSEN ainsi que les membres du groupe de travail « Évaluations et interventions » du CSEN.
Remerciements aux équipes de la DEPP pour le développement de l'outil informatique et la passation des tests.

Comment évaluer si un élève a bien compris tel ou tel concept mathématique ? Les enseignants savent bien que la simple récitation ou le calcul ne suffisent pas. En effet, il arrive souvent que les élèves mémorisent des recettes arithmétiques, sans pour autant comprendre le sens des objets qu'ils manipulent. Même s'ils peuvent faire illusion avec des problèmes identiques à ceux que l'enseignant a donnés en exemple, leurs performances s'effondrent dès que le problème cesse d'être familier. Ainsi, du fait de cette compréhension insuffisante, des différences anodines sur le plan mathématique font obstacle au transfert à une nouvelle situation, car les élèves ne reconnaissent pas qu'elle est de même nature.

En sciences cognitives, on parle d'une dissociation entre la mémoire **procédurale** et la mémoire **sémantique** : la connaissance de la procédure ne suffit pas à garantir la compréhension du sens des objets mathématiques.

Bien placer, c'est comprendre

Dès le premier degré, le Conseil Scientifique de l'éducation nationale recommande l'utilisation en classe de la **bande numérique**, qui évolue ensuite vers la **ligne numérique**. C'est un outil essentiel pour faciliter et révéler la compréhension de l'arithmétique, qui est proposé dès le début de CP lors des évaluations nationales (programme EvalAide). Pourquoi ? Parce que la relation entre le nombre et l'espace est un pilier des mathématiques à toutes les étapes du développement[1,2], en sorte que la compréhension précoce des relations entre le nombre et l'espace prédit les résultats scolaires ultérieurs en mathématiques.[3–5]

La figure 1 illustre différentes représentations spatiales des nombres et leur intérêt pédagogique. Dès la maternelle, la recherche montre que la bande numérique, où chaque case correspond à un nombre, aide les enfants à progresser en arithmétique. Elle aide notamment à comprendre que tous les nombres entiers 1,2,3… sont ordonnés et également espacés (acquisition d'une représentation linéaire des quantités) ; que plus un nombre est grand, plus il se situe vers la droite ; et qu'additionner ou soustraire correspondent à des déplacements à droite ou à gauche sur cette bande numérique. Les **jeux de plateau,** type « jeu de l'oie » ou « petits chevaux », où l'on avance un personnage dans l'espace, d'un nombre de cases correspondant à un coup de dés, facilitent la compréhension de la bande numérique. Les enfants qui y jouent progressent plus vite que les autres en mathématiques.[6–10]

Plus tard dans la scolarité, l'introduction d'autres métaphores spatiales permet de favoriser l'abstraction. La **ligne graduée** permet de comprendre qu'à chaque nombre correspond une position précise, et vice versa. Il devient alors possible de se demander ce qu'il y a « plus à droite » – ce qui fait réfléchir aux grands nombres » ; « à gauche de zéro » – c'est l'introduction des nombres négatifs ; ou encore « entre deux nombres » – ce qui donne un accès intuitif aux nombres décimaux et aux fractions. La recherche montre que les adultes qui sont experts en arithmétique possèdent un concept intégré de ligne numérique qui rassemble

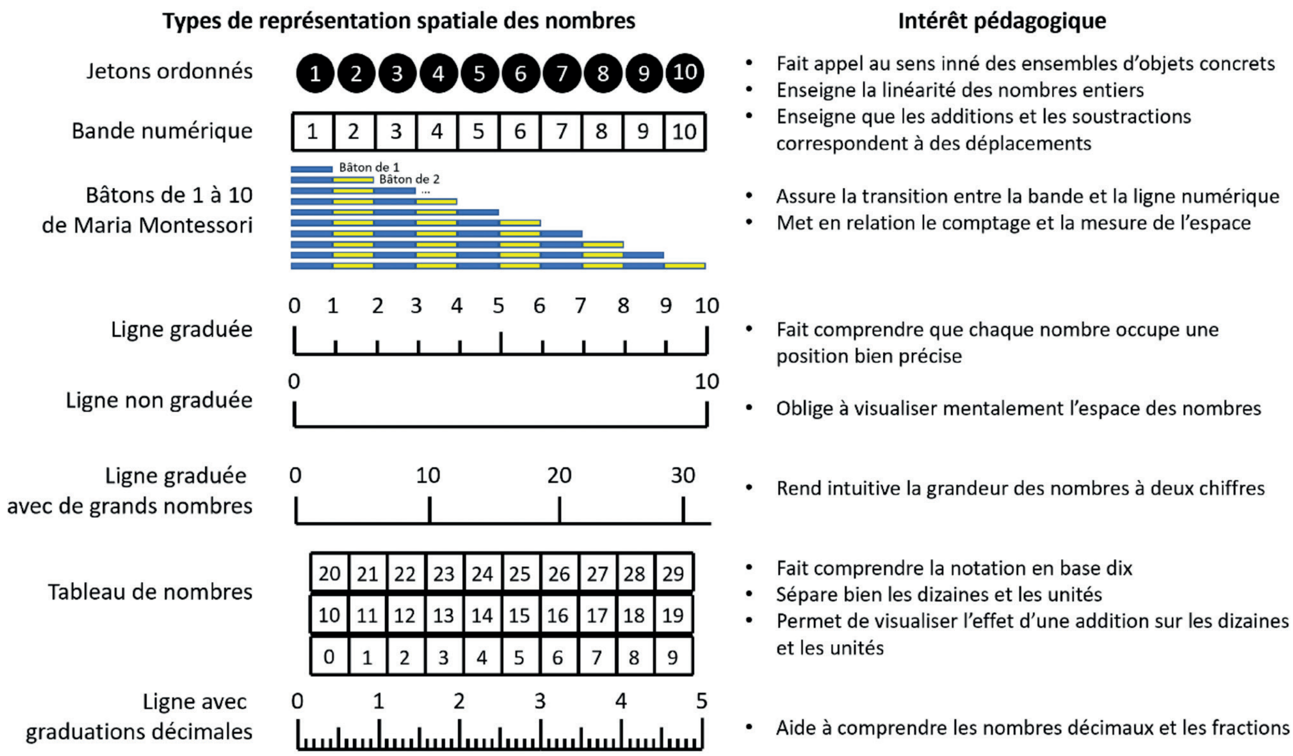


Figure 1. Exemples de différents types de représentations spatiales qui peuvent aider les élèves à comprendre le sens et la grandeur des nombres (voir aussi 1).

les entiers, les fractions et les décimaux[11]. Cela leur permet de visualiser facilement les grandeurs relatives de nombres tels que ½, ¾, 1 et 1,2.

L'introduction rapide de l'outil mental qu'est la ligne numérique facilite l'acquisition de ces concepts.[12] Dès le plus jeune âge, comprendre la position des nombres facilite leur comparaison rapide et intuitive.[13] Au cycle 2, la capacité de placer des nombres sur la ligne numérique est le plus important prédicteur de l'apprentissage ultérieur des fractions, tant sur le plan conceptuel que procédural.[4] Par la suite, la capacité de placer les nombres décimaux prédit l'apprentissage ultérieur de l'algèbre.[14] Plus généralement, la métaphore d'un espace des nombres est à la base d'un très grand nombre d'objets mathématiques de plus haut niveau : les coordonnées, les fonctions, les graphes, les nombres complexes, les espaces vectoriels, etc.

Pourquoi les fractions et les décimaux sont-ils si difficiles à comprendre ?

De nombreuses recherches indiquent que l'apprentissage des fractions comme un demi, un quart, trois dixièmes, etc., pose des difficultés considérables à l'école et au collège – et pourtant, dans la langue naturelle, les mots « moitié » ou « demi » sont appris bien plus tôt, vers 5 ans ![15] D'où provient cette difficulté ? Formellement, chaque fraction est constituée de deux nombres entiers positifs, le numérateur et le dénominateur : dans la fraction 3/5, lue « trois cinquièmes », trois est le numérateur, et cinq le dénominateur. L'élève doit pourtant les traiter comme un tout et comprendre qu'il s'agit d'une seule quantité, d'un seul nombre. Il s'agit de saisir qu'un rapport de deux nombres est encore un nombre. Les élèves qui n'ont pas compris le sens des fractions se bornent à traiter ces deux nombres indépendamment l'un de l'autre. C'est pourquoi ils ont du mal à retenir les règles qui régissent les opérations sur les fractions, car celles-ci leur semblent arbitraires : comment comprendre que la multiplication terme à terme soit autorisée $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}\right)$, mais pas l'addition $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a + c}{b + d}\right)$?

Ceux qui maîtrisent le concept de fraction ont compris que le numérateur et le dénominateur ont des rôles bien distincts. « Trois quarts », c'est un peu comme « trois pommes » : il faut commencer par *nommer* ce que l'on veut compter (les quarts, au *dénominateur*), puis *dénombrer* combien on en prend (au *numérateur*). Le tout donne un seul nombre, une seule grandeur. Les élèves qui maitrisent le concept de fraction sont capables de se représenter leur grandeur sur une « ligne numérique mentale ». Ils savent déterminer, assez rapidement, laquelle de deux fractions est la plus grande (par exemple, quel est le plus grand nombre : 4/5 ou 7/12 ?), sans se laisser troubler par la grandeur du numérateur et du dénominateur. Leurs résultats montrent un effet de distance : plus les quantités que représentent les fractions sont différentes, plus la réponse est rapide – ce qui montrent qu'ils en ont compris le sens.[16,17] Ils associent également automatiquement les petites fractions avec la gauche de l'espace, et les grandes fractions avec la partie droite de l'espace.[18] Autrement dit, ils ont compris que chaque fraction, chaque nombre rationnel, correspond à une grandeur que l'on peut situer dans l'espace des nombres, à des positions qui se situent entre les nombres entiers habituels.

Comme les fractions, les nombres décimaux introduisent des graduations *entre* les nombres entiers. Cependant, la compréhension des nombres décimaux pose des difficultés différentes. Les élèves doivent comprendre que ces nombres constituent une extension de la notation positionnelle des nombres entiers. Dans « 22 », la valeur du chiffre 2 change selon la position : le premier « vaut » 20 car il se situe à la position des dizaines. Dans les décimaux comme « 2,2 », l'élève doit prêter attention à la virgule et comprendre comment sont organisés les positions successives à droite de celle-ci. Une erreur classique consiste à croire que 1,9 est plus petit que 1,25 : dans les nombres « à virgule », la longueur n'est plus un indice fiable de la taille des nombres ! La même méconnaissance du rôle crucial de la virgule est à l'origine d'erreurs de calcul du type « 1,2 + 3 = 1,5 », très courantes chez les élèves. Apprendre à positionner les nombres décimaux, ce qui oblige à prêter attention à la position de la virgule, facilite la compréhension de leur grandeur et de leur sens.

Le test de la ligne numérique

Pour évaluer la compréhension des décimaux et des fractions, avec l'aide de la DEPP, nous avons conçu un test informatisé, simple et ludique, avec feedback. Nous avons adapté un test déjà utilisé par d'autres chercheurs[14,19], et qui consiste à placer un nombre (entier, décimal ou rationnel) sur une ligne graduée. À chaque essai, l'élève reçoit un nombre et dispose de dix secondes pour le placer sur une ligne graduée, à l'aide de la souris de l'ordinateur. S'il parvient à le placer à sa position exacte, l'élève reçoit un feedback positif (avec des effets visuels et musicaux appropriés), sinon on lui indique l'endroit où il aurait dû cliquer.

Les nombres et les problèmes proposés

Le test de la ligne numérique permet d'évaluer finement la maîtrise d'un grand nombre de concepts arithmétiques. Nous avons proposé aux élèves deux blocs successifs :

- le premier avec une ligne entre 0 et 20 avec des graduations pour chacun des entiers, des graduations plus grandes pour les multiples de 5 et 10, et des étiquettes explicites pour les nombres 0, 10 et 20
- le second avec une ligne entre 0 et 5 avec des graduations décimales, des graduations plus grandes pour les multiples de 0,5 et les entiers, et des étiquettes explicites pour les nombres 0, 1, 2, 3, 4 et 5.

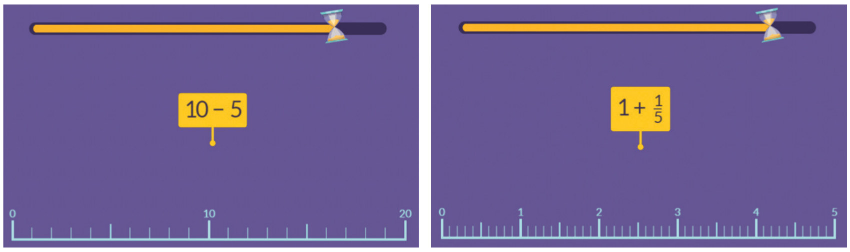


Figure 2. Ces copies d'écran montrent les deux lignes graduées présentées aux élèves (celle de gauche va de 0 à 20, celle de droite de 1 à 5), et des exemples de problèmes proposés.

Le premier groupe d'essais, avec la ligne de 0 à 20, testait l'arithmétique avec des nombres entiers. Les nombres présentés évaluaient

- La compréhension de la tâche, avec des **entiers** entre 0 et 20
- La compréhension de **la notation en base 10**. Il s'agissait par exemple de composer un nombre (par exemple 1 x 10 + 7), d'ajouter une dizaine (10 + 4), ou de soustraire des dizaines (25-20) ou des unités (15-5).
- L'**addition** de deux nombres à un chiffre (par exemple 2 + 3, 9 + 4)
- La **soustraction**, avec des problèmes inverses de l'addition (par exemple 5 – 2, 13 – 4)
- Les **principes fondamentaux de l'arithmétique** : addition de zéro (par exemple 5 + 0), multiplication par zéro (5 x 0), multiplication par 1 (5 x 1), soustraction d'un nombre avec lui-même (5 – 5), division d'un nombre par lui-même ($\frac{a}{b}$), et enfin commutativité de la multiplication (par exemple 6 x 18 – 18 x 6 ; il ne s'agissait pas de faire tous les calculs, mais de remarquer que le résultat fait nécessairement zéro).

Le second groupe d'essais, avec la ligne de 0 à 5, testait les nombres décimaux et les fractions. Les nombres présentés évaluaient

- La compréhension de la tâche, avec des **entiers** allant de 0 à 5
- La compréhension des **décimaux** entre 0,1 et 4,9 (en excluant les entiers)
- La connaissance des **principes du système décimal**. Il s'agissait d'additions qui combinaient un entier et un nombre décimal entre 0 et 1, soit dans l'ordre « logique » (4 + 0,6), soit dans l'ordre inverse (0,6 + 4). Il n'y a donc pas besoin d'additionner, mais juste de comprendre quel chiffre occupe quelle place dans la notation décimale du résultat
- Le **calcul avec les nombres décimaux**. Il s'agissait d'additions et de soustractions, avec ou sans retenue (par exemple 4,6 + 0,3 ; ou 4,1 – 2,5 ; ou encore 2,8 + 1,2)
- La compréhension des **fractions**. Environ la moitié des fractions présentées correspondaient à un nombre entier (par exemple $\frac{4}{2}$ ou $\frac{4}{8}$), tandis que les autres correspondaient à des graduations décimales entre 0 et 1 (par exemple $\frac{4}{8}$ ou $\frac{2}{10}$).
- Le **calcul avec les fractions**. Il s'agissait toujours de calculs simples, soit entre un entier et une fraction (par exemple $2+\frac{2}{10}$ ou $1-\frac{1}{2}$), soit entre deux fractions avec le même dénominateur (par exemple $\frac{3}{4}$).

En septembre 2020, la DEPP a fait passer ce test sur ordinateur à un échantillon représentatif de 3 412 élèves français de début de sixième, âgés en moyenne de 11 ans. À la suite de difficultés informatiques, nous présentons ici les résultats de 1 274 d'entre eux. Ces résultats ont été répliqués en septembre 2021.

Quels sont les résultats ?

La figure 3 donne un premier aperçu des résultats : elle indique le taux d'erreurs pour chaque catégorie d'essai. On voit immédiatement que, si les élèves font peu d'erreurs avec les nombres entiers, la base 10, les additions et même les décimaux, les performances sont médiocres pour les soustractions et les principes arithmétiques, et très mauvaises pour le calcul décimal et surtout pour les fractions et les calculs avec les fractions. Dans cette dernière catégorie, on se situe autour de 80 % d'erreurs ! C'est dire que le concept de grandeur d'une fraction n'est absolument pas maîtrisé par les élèves, alors que les programmes spécifient qu'il est étudié en CM1 et surtout en CM2.

Prêtons attention aux trois courbes de couleurs différentes : elles indiquent des variantes du logiciel. Selon la version, la souris « s'aimantait » sur l'emplacement le plus proche (rouge) ou pas (vert et bleu) – mais ce paramètre ne faisait guère de différence. Par contre, certains élèves recevaient du feedback sur leurs réponses (groupes rouge et vert), et d'autres non (groupe bleu). Les résultats indiquent que ce paramètre a un effet

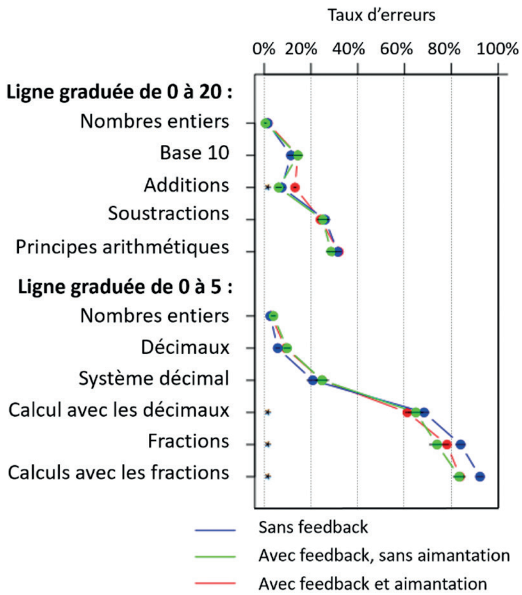


Figure 3. Pourcentages d'erreurs observées dans le placement de différents types de nombres sur la ligne numérique.

significatif : les résultats sur les fractions sont un peu meilleurs dans le groupe avec feedback, auquel on indiquait la bonne réponse lorsqu'ils se trompaient. C'est un résultat intéressant parce que, en accord avec de nombreux résultats antérieurs[20,21], il montre que l'évaluation peut aussi être un moment d'apprentissage : **se tester permet d'apprendre**. Le feedback aide les élèves en les corrigeant, et cet effet positif se voit en quelques minutes seulement. Ce résultat laisse penser que la pratique régulière du placement des nombres sur la ligne numérique, avec le feedback d'un logiciel ou de l'enseignant, pourrait améliorer la compréhension de la grandeur des fractions, donc de leur sens.

Corrélation avec la réussite en mathématiques

La figure 4 montre comment les résultats varient lorsqu'on répartit les élèves en cinq groupes de niveau en mathématique, en fonction de leurs résultats à un test indépendant de résolution de problèmes arithmétiques.

Il est clair que ce sont les mêmes problèmes qui posent des difficultés à tous les élèves – particulièrement les principes arithmétiques, les décimaux et les fractions. Cependant, on voit également que le test de la ligne numérique possède une excellente valeur diagnostique : selon le niveau des élèves en mathématiques, le taux d'erreur varie du simple au double, y compris sur des opérations très simples et qui devraient normalement être bien comprises à cet âge, comme l'addition ou la soustraction des entiers.

En ce qui concerne les fractions, le résultat est très mauvais, puisque même les meilleurs élèves échouent plus de la moitié du temps. Voyons à présent quelle est la nature de leurs erreurs.

L'analyse des types d'erreurs

Les erreurs des élèves sont riches d'enseignements. Elles révèlent ce qu'ils ont mal compris, et les enseignants peuvent les utiliser pour déterminer la source de leurs difficultés. Voici donc un bref catalogue des principales erreurs que commettent les élèves de sixième sur la ligne numérique :

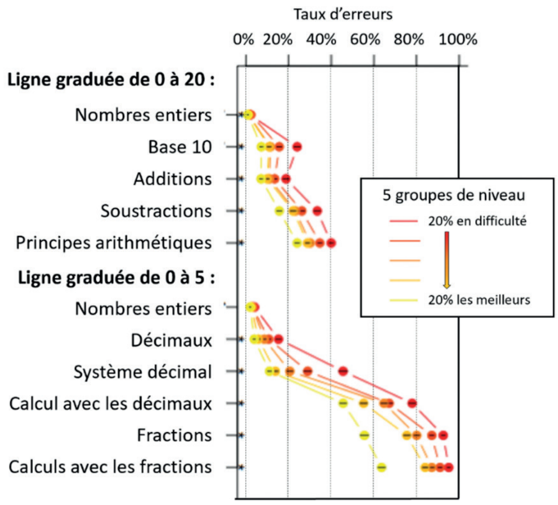
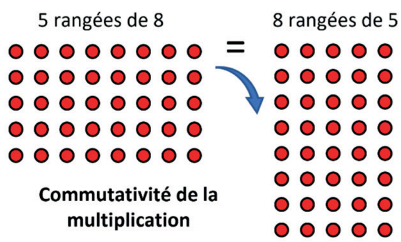


Figure 4. Pourcentages d'erreurs lorsque les élèves sont triés en fonction de leur niveau en mathématique (5 groupes de niveau).

- Les **nombres entiers** jusqu'à 20 comme nous l'avons noté, ne posent guère de difficultés en sixième. Les rares erreurs sont proches d'une ou deux unités de la bonne réponse, et sont sans doute des erreurs d'inattention. La présence de difficultés dans ce domaine est rare, et devrait alerter l'enseignant si des erreurs sont toujours présentes en sixième.
- La **base 10** ne pose pas d'immenses difficultés, mais on observe tout de même près de 20 % d'erreurs pour les problèmes 25-20 (réponses dominantes : 0, 10, 15 ou 20), 1 x 10 – 10 (réponse : 10), et 2 x 10 – 10 (réponses : 0 ou 20). Ces erreurs ne suffisent pas à diagnostiquer les difficultés des élèves, mais elles suggèrent qu'il pourrait être utile, en début de sixième, de réviser la multiplication par dix et la manière dont les dizaines et les unités se combinent.
- L'**addition** et surtout la **soustraction** des nombres entiers suscitent entre 20 % et 40 % d'erreurs, parfois plus. Ce sont surtout les problèmes de retenue, avec franchissement de la dizaine, et avec des nombres relativement grands (additions du type 8 + 9 ou 7 + 6 ; soustractions du type 15 – 7 ou 16 – 9), qui induisent le plus d'erreurs. Bon nombre d'erreurs s'étalent autour de la bonne réponse, ce qui suggère que les élèves les plus en difficulté ont essayé de compter et se sont trompés dans leur comptage, ou n'ont pas le temps de compter correctement. D'autres élèves se trompent d'opération (par exemple 12-4=16). D'autres encore n'ont aucune idée de l'ordre de grandeur du résultat (par exemple 16-9=17). La pratique plus régulière du calcul et des compléments à dix, tout au long du premier degré, devrait aider à corriger ces difficultés.
- En ce qui concerne les **principes de l'arithmétique**, la situation est très tranchée. Certains principes d'addition (n + 0 = n) et de soustraction (n – n = 0) sont maîtrisés. Par contre, la multiplication par 0 et par 1 conduit à environ 6 % erreurs du type n x 1 = 0 et 22 % d'erreurs du type n x 0 = n (par exemple 5 x 0 = 5). Ainsi, ces élèves confondent l'élément neutre pour l'addition et la soustraction (0) et celui pour la multiplication et la division (1). Le manque d'appréciation de la commutativité de la multiplication, évaluée par des problèmes tels que 8 x 15 – 15 x 8, entraîne également 55 % d'erreurs (réponses 8, 10, 15 ou 20), ce qui montre que les élèves n'ont pas compris le raccourci qu'elle



permet. Il est probable qu'ils restent influencés par la conception de la multiplication comme une addition répétée, qui ne rend pas intuitive l'idée de la commutativité : additionner 8 fois la valeur 15, et 15 fois la valeur 8, semblent deux opérations bien distinctes. Cela montre l'importance de travailler la commutativité avec des ensembles d'objets : sous forme visuelle, cette propriété devient une évidence (figure précédente). Enfin, comme les autres fractions que nous verrons plus loin, la division d'un nombre par lui-même est totalement incomprise (81 % d'erreurs; exemples de réponses pour 3/3 : 0, 3, 6, 10 ou même 15 ou 20).

- Si les **nombres décimaux** n'entrainent que 9 % d'erreurs, souvent proches de la bonne réponse, les **principes du système décimal** sont source de grande confusion. L'erreur principale consiste à ne pas savoir ajouter un décimal et un entier, particulièrement dans cet ordre (31 % d'erreurs). Ainsi, au problème 0,2+1, la réponse est souvent 0,3 ou 3 : l'élève ne tient pas bien compte de la virgule, ce qui indique une méconnaissance du sens de ces quantités.
- Les **calculs avec des décimaux** entrainent entre 40 % et 90 % d'erreurs. C'est la retenue qui pose à nouveau des difficultés, dans des problèmes comme 0,9 + 3,7 ou 3,1 – 1,3. Les erreurs sont réparties quasi aléatoirement autour de la bonne réponse et de la réponse à l'opération opposée. Beaucoup d'élèves confondent l'addition et la soustraction !
- Les **fractions**, même très simples, entrainent 78 % d'erreurs. Ainsi la fraction 1/2 entraine 78 % d'erreurs, avec des réponses telles que 1 ; 2 ; 1,5 ; 2,5 ; ou encore 1,2 (figure 5). Beaucoup d'élèves n'ont pas compris qu'une fraction représente une seule quantité, un seul nombre, et ils choisissent donc comme réponse l'un ou l'autre des entiers indiqués. D'autres élèves confondent les fractions et les décimaux, et confondent ainsi 4/8 avec 4,8 ou 3/6 avec 3,6, comme si les signes « , » et « / » avaient une signification identique et séparaient simplement deux nombres. Ce sont des erreurs très fréquentes, peut-être liées au fait que les décimaux et les fractions sont souvent enseignés presque conjointement en CM2.
- Dans ces conditions, il n'est guère surprenant que les **calculs avec des fractions**, même les plus élémentaires, entrainent entre 75 % et 90 % d'erreurs. Les problèmes n'incluaient pourtant que des questions simples si l'on a compris ce qui signifient les grandeurs en jeu, par exemple :
  - → 3/4 + 1/4 : les principales réponses sont 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,4 ; 4 ; 4,4 ; ou encore 4,8
  - → 4 – 1/10 : réponses 5 ; 3 ; 2,5 ; 1, ou encore 0
  - → 5 – 1/2 : réponses réparties un peu partout, notamment 4 ; 2,5 ; 2 ; 1,5 ; ou 0.

Quelles stratégies d'enseignement recommander ?

Le premier enseignement de cette recherche est que les élèves de sixième n'ont pas encore bien compris **comment les différents types de nombres se relient entre eux et s'intègrent en un seul système**. Cette intégration est loin d'être terminée en fin de premier degré. L'arithmétique est constituée d'un tissu de relations que seule la rencontre avec une diversité de problèmes (concrets et abstraits), soutenue par un guidage approprié par les enseignants, permettent de découvrir. L'enquête TIMMS suggère que **l'élargissement des conceptions travaillées au primaire** corrèle avec une meilleure performance des élèves.[22] La comparaison des décimaux et des fractions, leur classement, leur mise en relation avec des graphiques et des formes, l'équivalence des fractions et des nombres dans différentes écritures, pourraient être travaillés plus souvent au cycle 3.

Le second enseignement est que **la notion de ligne numérique peut aider à comprendre les décimaux et les fractions**. En effet, des revues récentes de la littérature sur les interventions pédagogiques[23,24] indiquent qu'il est efficace de pratiquer des activités qui consistent à **ancrer dans le concret** la connaissance de la **grandeur** des décimaux et des fractions, à travers des activités de comparaison, de

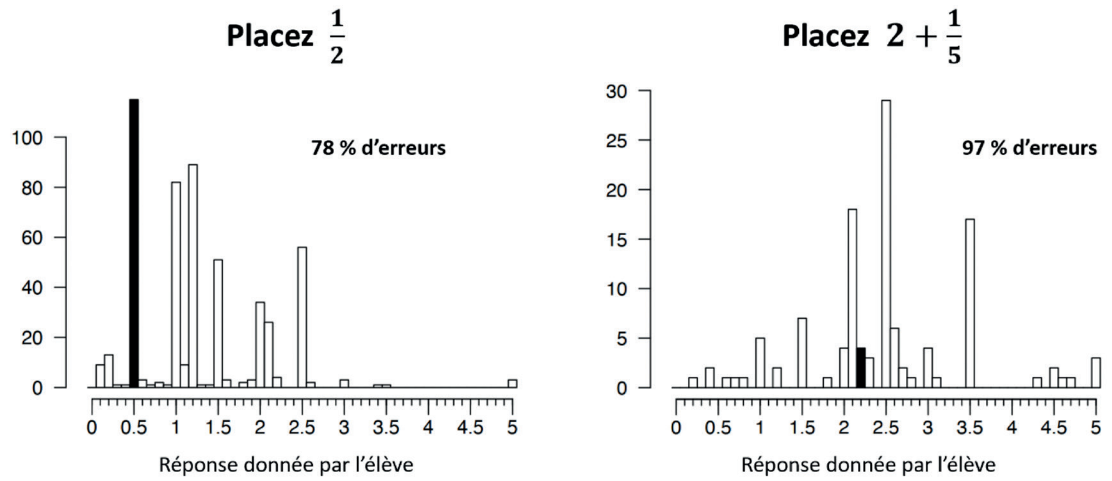
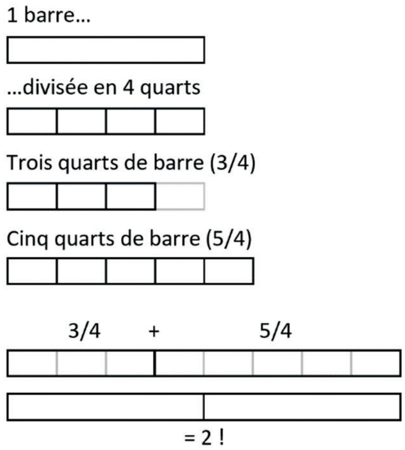


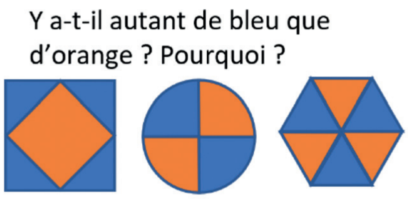
Figure 5. Exemples de réponses à deux problèmes proposés aux élèves de sixième. Pour chaque problème, la hauteur des barres indique le nombre d'élèves qui ont donné une certaine réponse.

mise en ordre, et de positionnement de ces nombres sur des lignes numériques. On peut commencer très tôt : des données longitudinales montrent que la connaissance de la grandeur des nombres entiers à l'âge de six ans prédit la connaissance de la grandeur des fractions à l'âge de 13 ans.[25] La recherche montre qu'un entraînement qui vise à mieux **faire comprendre la grandeur des fractions** entraîne également des gains en compréhension de la manière dont les règles d'arithmétiques s'appliquent aux fractions.[26] Cependant, l'impact du simple fait de jouer à placer des fractions sur la ligne numérique est débattu[27,28] : les données suggèrent que le jeu lui-même ne suffit pas, et qu'il faut l'accompagner d'un **enseignement explicite** de ce que sont les fractions et de la manière dont elles se comportent.

Un point est fondamental : il faut penser aux fractions comme des **multiplications** d'un nombre (le numérateur) par une nouvelle unité (qui vaut 1/n, où n est le dénominateur). Par exemple, 2/9, c'est deux fois « un neuvième » : tout se passe comme si on avait changé d'unité, et qu'on comptait à présent en neuvièmes. Il devient alors très facile de comprendre que 2/9 + 1/9, c'est 3/9. Et de même qu'on ne peut pas additionner des mètres et des pieds, on ne peut pas additionner deux fractions, par exemple 1/2 et 1/3, sans commencer par les « réduire au même dénominateur », c'est-à-dire les mesurer avec la même unité.

Une intervention récente[29] montre effectivement que les élèves apprennent mieux lorsqu'on commence par ramener les fractions à des fractions unitaires (1/n), qui sont plus faciles à comprendre et à combiner. Une autre[30] suggère qu'il peut être intéressant, avant d'introduire les décimaux et les fractions, de commencer par un travail sur les pourcentages, et notamment les pourcentages qui sont relativement familiers des enfants, comme 50 % (par exemple, on peut leur montrer comment calculer 75 % d'une bouteille de 900 ml en commençant par leur faire calculer 50 % de 900 ml, puis 25 % = 50 % de ce résultat, et en additionnant les deux). Ces deux interventions partagent l'idée qu'il est utile de **décomposer les nombres, et notamment les fractions**, additivement comme multiplicativement, pour mieux comprendre ce qu'ils veulent dire.





Sur la base de la littérature scientifique ainsi que de l'expérience pédagogique, on peut proposer une **approche en spirale** qui commence très tôt à travailler sur la grandeur des nombres, à partir des petits nombres entiers et en élargissant progressivement aux autres types de nombres. On peut ainsi :

- Jouer avec des **jeux de plateau** dès la maternelle, afin de comprendre
  → comment les nombres s'organisent de gauche à droite
  → comment leur position permet de les comparer
  → et comment l'addition et son inverse, la soustraction, correspondent à des déplacements sur cette ligne.
- Introduire très tôt l'**espace des nombres**, selon la progression proposée en figure 1. Dès la maternelle, on peut jouer à ordonner, en ligne, les premiers nombres entiers pour former une bande numérique (à l'aide d'un jeu de cartes par exemple). Plus tard, on passe à la ligne numérique, où chaque nombre occupe une position bien précise. Enfin, on y intègre progressivement les opérations, les fractions les plus simples (notamment 1/2 et 3/2), les décimaux, etc., toujours en donnant du feedback à l'élève en cas d'erreur.
- Faire pratiquer la **mesure**, notamment celle des longueurs, à l'aide d'un mètre qui introduit les nombres entiers, puis les décimaux et les fractions, dans un contexte concret.
- Expliquer comment les nombres peuvent être représentés par des **barres** que l'on peut diviser ou regrouper. Ainsi les opérations telles que 3/4 + 5/4 deviennent faciles à visualiser (voir la figure ci-contre). La division d'un segment facilite le raisonnement avec des fractions, bien plus que la classique division d'une pizza ou d'une tarte.[12]
- Faire pratiquer les **constructions géométriques**. Leur division ou leur pliage permettent de comprendre la division des longueurs et des surfaces par deux, par trois, par quatre… (voir la figure ci-contre).
- Introduire les **multiples sens des fractions**. Diviser, ce n'est pas seulement partager (par exemple partager 10 tartes entre 5 personnes, chacun en aura 2), mais cela peut aussi être distribuer par paquets (par exemple distribuer 10 tartes par paquets de 5, cela fera 2 paquets). Seul le second sens permet de comprendre la division par une fraction : si l'on dispose de 10 tartes et que l'on veut faire des lots d'une demi-tarte, il est clair que cela fera 20 lots… alors que cela n'aurait aucun sens de distribuer 10 tartes entre une demi-personne !

La compréhension approfondie des fractions et de leurs règles de combinaison nécessite leur intégration dans un système arithmétique qu'on appelle une « algèbre » et qui comprend les relations réciproques entre addition et soustraction, entre multiplication et division, les rôles spécifiques du 0 et du 1, etc. Le Conseil Scientifique de l'éducation nationale produira prochainement un document complet sur les « structures multiplicatives » dans lesquelles s'intègrent les fractions, et des recommandations pour faciliter leur apprentissage tout au long du premier et du second degré.

Ce qu'il faut retenir

- Acquérir **l'intuition de la grandeur des nombres** est un aspect fondamental et souvent négligé de l'éducation mathématique.
- L'idée que tous les nombres (entiers, décimaux, fractions…) forment un **espace**, qu'ils se répartissent sur une **ligne**, est un pilier essentiel des mathématiques.
- **Savoir placer un nombre sur une ligne graduée** est un excellent indicateur de la compréhension des nombres et de l'arithmétique.
- Les élèves de sixième éprouvent de grandes difficultés à placer les nombres décimaux et surtout les fractions sur la ligne numérique.
- La conception répandue qu'un nombre décimal et une fraction « séparent » deux nombres par un signe (que ce soit une virgule pour les décimaux ou un «/» pour les fractions) est profondément trompeuse et conduit à confondre ces deux notions.
- Les fractions et les nombres décimaux gagnent à être travaillés dans **de nombreux contextes** pédagogiques (comparaison, mise en ordre, mesure, graphes, etc).
- **Placer un nombre décimal ou une fraction sur la ligne numérique et recevoir un feedback** constituent une bonne manière d'apprendre à maîtriser ces concepts.
- La bande numérique, puis la ligne numérique, peuvent être introduites **dès la maternelle** – c'est une aide pour ordonner les nombres, compter et calculer.
- La ligne numérique peut être progressivement enrichie du zéro, des grands nombres, des décimaux, des fractions, des nombres négatifs…
- **Jouer à des jeux de plateau** met rapidement en place la notion de bande numérique dès la maternelle et le CP.
- **Mesurer des longueurs,** par exemple pour construire des formes ou des objets, fait travailler les nombres décimaux et les fractions dans un contexte concret.
- **L'apprentissage des fractions commence tôt.** Les fractions les plus simples comme « un demi » ou « un quart », qui appartiennent au langage courant, peuvent être introduites dès la maternelle, et il est souhaitable d'y revenir chaque année dans **une approche pédagogique « en spirale ».**

Pour aller plus loin

Pour une revue en français et une analyse détaillée des difficultés que posent les fractions aux élèves de différents pays, fondée sur l'enquête TIMMS, on pourra se référer à la publication suivante :

Martinez, S., & Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. 18. , 94, DEPP MEN. *Éducation et formations*, DEPP MEN, 18(94). https://www.education.gouv.fr/media/14858/download

Le ministère de l'éducation nationale publie des repères annuels de progression en mathématiques, avec des attendus en fin de CM1, CM2 et sixième : https://eduscol.education.fr/document/14026/download

Bibliographie

1. Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. An Integrative Theory of Numerical Development. *Child Dev. Perspect.* **8**, 144–150 (2014).

2. Dehaene, S. *La bosse des maths, quinze ans après (seconde édition).* (Odile Jacob, 2007).

3. Schneider, M. *et al.* Associations of Number Line Estimation With Mathematical Competence: A Meta-analysis. *Child Dev.* **89**, 1467–1484 (2018).

4. Jordan, N. C. *et al.* Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *J. Exp. Child Psychol.* **116**, 45–58 (2013).

5. Siegler, R. S. & Booth, J. L. Development of numerical estimation in young children. *Child Dev* **75**, 428–44 (2004).

6. Siegler, R. S. & Ramani, G. B. Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Dev Sci* **11**, 655–61 (2008).

7. Siegler, J. C. & Ramani, G. B. Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolers' numerical understanding. *J Educ Psychol.* **101**, 545–560 (2009).

8. Laski, E. V. & Siegler, R. S. Learning from number board games: You learn what you encode. *Dev. Psychol.* **50**, 853–864 (2014).

9. Griffin, S., Case, R. & Siegler, R. S. Rightstart: Providing the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure. in *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (ed. McGilly, K.) 25–49 (MIT Press, 1986).

10. Räsänen, P., Salminen, J., Wilson, A. J., Aunio, P. & Dehaene, S. Computer-assisted intervention for children with low numeracy skills. *Cogn. Dev.* **24**, 450–472 (2009).

11. Binzak, J. V. & Hubbard, E. M. No calculation necessary: Accessing magnitude through decimals and fractions. *Cognition* **199**, 104219 (2020).

12. Neagoy, M. *Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding.* (Association for Supervision & Curriculum Development, 2017).

13. Sella, F., Berteletti, I., Lucangeli, D. & Zorzi, M. Preschool children use space, rather than counting, to infer the numerical magnitude of digits: Evidence for a spatial mapping principle. *Cognition* **158**, 56–67 (2017).

14. DeWolf, M., Bassok, M. & Holyoak, K. J. From rational numbers to algebra: Separable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *J. Exp. Child Psychol.* **133**, 72–84 (2015).

15. Kuperman, V., Stadthagen-Gonzalez, H. & Brysbaert, M. Age-of-acquisition ratings for 30,000 English words. *Behav. Res. Methods* **44**, 978–990 (2012).

16. Schneider, M. & Siegler, R. S. Representations of the magnitudes of fractions. *J. Exp. Psychol. Hum. Percept. Perform.* **36**, 1227–1238 (2010).

17. DeWolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M. & Holyoak, K. J. Magnitude comparison with different types of rational numbers. *J. Exp. Psychol. Hum. Percept. Perform.* **40**, 71–82 (2014).

18. Toomarian, E. Y. & Hubbard, E. M. The fractions SNARC revisited: Processing fractions on a consistent mental number line. *Q. J. Exp. Psychol.* **71**, 1761–1770 (2018).

19. Iuculano, T. & Butterworth, B. Understanding the real value of fractions and decimals. *Q J Exp Psychol Hove* **64**, 2088–98 (2011).

20. Dehaene, S. Apprendre !: Les talents du cerveau, *le défi des machines.* (Odile Jacob, 2018).

21. Brown, P. C., Roediger, H. L. & McDaniel, M. A. *Mets-toi ça dans la tête !: Les stratégies d'apprentissage à la lumière des sciences cognitives.* (Markus Haller éditions, 2016).

22. Martinez, S. & Roditi, E. Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. 18. , 94, DEPP MEN. *Educ. Form. DEPP MEN* **18**, (2017).

23. Siegler, R. S. & Lortie-Forgues, H. Hard Lessons: Why Rational Number Arithmetic Is So Difficult for So Many People. *Curr. Dir. Psychol. Sci.* **26**, 346–351 (2017).

24. Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Dev. Rev.* **38**, 201–221 (2015).

25. Bailey, D. H., Siegler, R. S. & Geary, D. C. Early predictors of middle school fraction knowledge. *Dev. Sci.* **17**, 775–785 (2014).

26. Fuchs, L. S. *et al.* Improving at-risk learners' understanding of fractions. *J. Educ. Psychol.* **105**, 683–700 (2013).

27. Fazio, L. K., Kennedy, C. A. & Siegler, R. S. Improving Children's Knowledge of Fraction Magnitudes. *PLOS ONE* **11**, e0165243 (2016).

28. Nuraydin, S., Stricker, J. & Schneider, M. No transfer effect of a fraction number line game on fraction understanding or fraction arithmetic: A randomized controlled trial. *J. Exp. Child Psychol.* (2022) doi:10.1016/j.jecp.2021.105353.

29. Braithwaite, D. W. & Siegler, R. S. Putting fractions together. *J. Educ. Psychol.* **113**, 556–571 (2021).

30. Moss, J. & Case, R. Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *J. Res. Math. Educ.* **30**, 122–147 (1999).

Retrouvez l'intégralité des textes du CSEN sur le lien suivant

reseau-canope.fr/conseil-scientifique-de-leducation-nationale